INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

GESTÃO DE STOCKS

(Modelos Determinísticos)

António Carlos Morais da Silva
Professor de I.O

1. Nota Prévia

Este texto restringe-se à apresentação de técnicas quantitativas associadas à gestão de stocks pois é dirigido a alunos que também frequentam/frequentaram a cadeira de Gestão de Aprovisionamentos.

2. Modelo determinístico de Quantidade Económica de Encomenda (QEE) – Pressupostos

- Refere-se a um *único* artigo não perecível (deterioração ou obsolescência)
- A *procura* do artigo é independente da de outro artigo
- A *procura* é determinística, de valor constante ("θ" unidades/un. tempo)
- O *nível do stock* é permanentemente conhecido (*revisão contínua*) e reposto com a encomenda periódica da mesma quantidade Q^* (quantidade económica de encomenda)
- Não é permitida a *ruptura* do stock
- A *encomenda* do artigo é feita directamente pelo vendedor ou produtor
- A *encomenda* do artigo é lançada em qualquer momento
- A *reposição* do stock é instantânea
- O *armazenamento* do artigo é feito em local único
- O *tempo de reaprovisionamento* é conhecido e determinístico
- Horizonte de optimização ilimitado

3. Simbologia e seu significado

A tabela seguinte apresenta os símbolos utilizados no texto e o respectivo significado:

θ	Taxa de consumo (nº de artigos/unidade de tempo)
ρ	Nível de serviço (percentagem do período "T", em que não há ruptura do stock)
I	Taxa de Posse (percentagem do custo de Aquisição/unidade de tempo)
C_a	Custo unitário de Aquisição do artigo
C_e	Custo associado ao lançamento de 1 encomenda do artigo (ou à preparação no caso de produção)
C_p	Custo unitário de Posse do artigo/unidade de tempo
C_r	Custo unitário de Ruptura do stock do artigo /unidade de tempo
Q	Nº de unidades de um artigo
Q^*	Quantidade Económica (óptima) de Encomenda de um artigo (QEE)
S	Stock activo (utilizado em modelos em que se admite a ruptura do stock)
T	Período do stock ou Ciclo de Reaprovisionamento (intervalo de tempo entre 2 reaprovisionamentos sucessivos)
T_r	Tempo (prazo) de Reaprovisionamento (intervalo de tempo entre o lançamento da encomenda e a recepção do artigo)
P_e	Ponto de Encomenda (nos modelos de revisão contínua, é o stock do artigo que, quando atingido, indica o momento de lançamento de nova encomenda)
K	Custo de uma política de stock (expresso em u.m. para uma dada unidade de tempo)
r	Taxa de produção (replenishment) (nº de artigos/unidade de tempo)

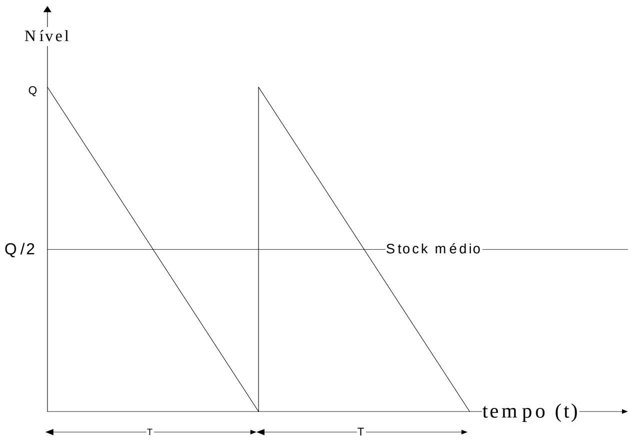
4. Modelo de QEE

a. Pressupostos

- Procura: constante e contínua à taxa "θ"
- Tempo de Reaprovisionamento : $T_r = 0$
- Custo de Ruptura : não é admitida a ruptura do stock

b. Formalização

O gráfico seguinte traduz a evolução do stock de um artigo em função do tempo:



O stock máximo é Q no início de cada período "T" do stock (ciclo de reaprovisionamento).

No intervalo de tempo "T" os custos associados ao stock são os seguintes:

Aquisição: QC_a

Encomenda : C_e (1 encomenda de Q unidades)

Posse:

O stock médio no tempo "T" é de $\frac{Q+0}{2}=\frac{Q}{2}$ unidades, por unidade de tempo, pelo que no período "T" o custo da posse é de $C_p\left(\frac{Q}{2}\right)T$

No período "T" o custo total K_T é pois (AQUISIÇÃO + POSSE + ENCOMENDA):

$$K_T = QC_a + C_p\frac{Q}{2}T + C_e$$

Do gráfico anterior, deduz-se que se "Q" unidades saem do stock à taxa de consumo "θ" e satisfazem a procura durante "T" unidades de tempo, então $\theta = \frac{Q}{T}$. Substituindo na expressão anterior tem-se:

$$K_T = QC_a + C_p\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{\theta}\right) + C_e = QC_a + C_p\left(\frac{Q^2}{2\theta}\right) + C_e$$

O custo do stock por unidade de tempo é então $K = \frac{K_T}{T} = \left(\frac{\theta}{Q}\right)K_T = \theta C_a + \left(\frac{Q}{2}\right)C_p + \left(\frac{\theta}{Q}\right)C_e$ de que se pretende o valor mínimo (função objectivo).

Notando que K= f(Q) calcula-se o valor de "Q" que anula a 1ª derivada:

$$\frac{dK}{dQ} = -\frac{\theta C_e}{Q^2} + \frac{C_p}{2} = 0 \qquad \boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}}}$$

Como a 2ª derivada é positiva então f(Q^*) é o valor mínimo do custo do stock.

A quantidade " Q^* " é designada Quantidade Económica de Encomenda (QEE).

Sendo a procura constante e contínua então o Ciclo Óptimo é $T^* = \frac{Q^*}{\theta}$ expresso na unidade de tempo de "θ" e <u>*nesta unidade de tempo*</u> o custo óptimo do stock é

$$\boxed{K^* = \theta C_a + \left(\frac{Q^*}{2}\right) C_p + \left(\frac{\theta}{Q^*}\right) C_e}$$

em que :

- θC_a = custos de aquisição de "θ" unidades do artigo para a unidade de tempo de "θ"
- $\left(\frac{Q^*}{2}\right) C_p$ = custos de posse do artigo na unidade de tempo de "θ" (e também de C_p)
- $\left(\frac{\theta}{Q^*}\right) C_e$ = custos das $\left(\frac{\theta}{Q^*}\right)$ encomendas de Q^* unidades para garantir a satisfação da procura de "θ" unidades do artigo

Se nas expressões dos *custos de posse ou encomenda* substituirmos $Q^* = \sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}}$ conclui-se que o custo mínimo K^* se verifica quando *aqueles custos são iguais*:

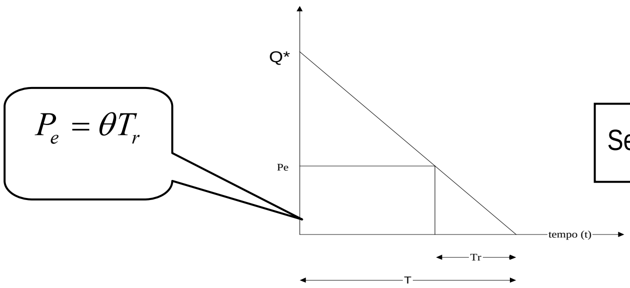
$$\left(\frac{\theta}{Q^*}\right) C_e = \frac{\theta}{\sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}}} C_e = \frac{\left(\sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}}\right)\theta C_e}{\frac{2\theta C_e}{C_p}} = \frac{Q^*}{2} C_p$$

O Custo unitário de Posse "C_p" é expresso, em regra, como percentagem do Custo unitário de Aquisição, ou seja, $C_p = I C_a$.

Sendo o Stock Médio $\left(\frac{Q^*}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\theta C_e}{I C_a}}$, conclui-se que este:

- é *directamente proporcional à raiz quadrada da taxa de consumo* (e não à própria taxa de consumo)
- é *inversamente proporcional à raiz quadrada do Custo unitário de Aquisição* pelo que o stock médio de um artigo caro é inferior ao de um artigo barato.

c. Tempo (prazo) de Reaprovisionamento e Ponto de Encomenda



Se $P_e > Q^*$ subtrair Q^* até obter $P_e \leq Q^*$.

d. Coeficiente de Variabilidade

Considera-se adequado recorrer a modelos de QEE (quantidade económica de encomenda) quando o coeficiente de variabilidade *não ultrapassa o valor de 0.2* (20%).

Este coeficiente é igual à razão entre a Variância da Procura média e o Quadrado da Procura média.

Nos casos em que tal não se verifica deve recorrer-se à Programação Dinâmica.

e. Exemplo de aplicação do modelo de QEE

Considere-se o artigo X de que a procura média anual (300 dias) é de 12000 unidades com variabilidade insignificante.

O capital necessário para suportar o stock durante 1 ano, sem ruptura, pode alternativamente ser aplicado com rendimento de 25%.

Sendo o custo unitário de 500 u.m., o custo de encomenda de 300 u.m. e o prazo de entrega de 5 dias, calcular a política óptima de gestão deste stock.

SOLUÇÃO

Dados: $\theta = 12000\,/\,ano$; $C_a = 500\ u.m.$; $C_e = 300\ u.m.$; $I = 0.25$; $T_r = 5\ dias$

Quantidade Económica de Encomenda = $Q^* = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{I\ C_a}} = \sqrt{\dfrac{2(12000)(300)}{(0.25)(500)}} = 240\ unidades$

Período (ciclo) = $T^* = \dfrac{Q^*}{\theta} = \dfrac{240}{12000} = 0.02\ anos = (0.02)(300\ dias) = 6\ dias$

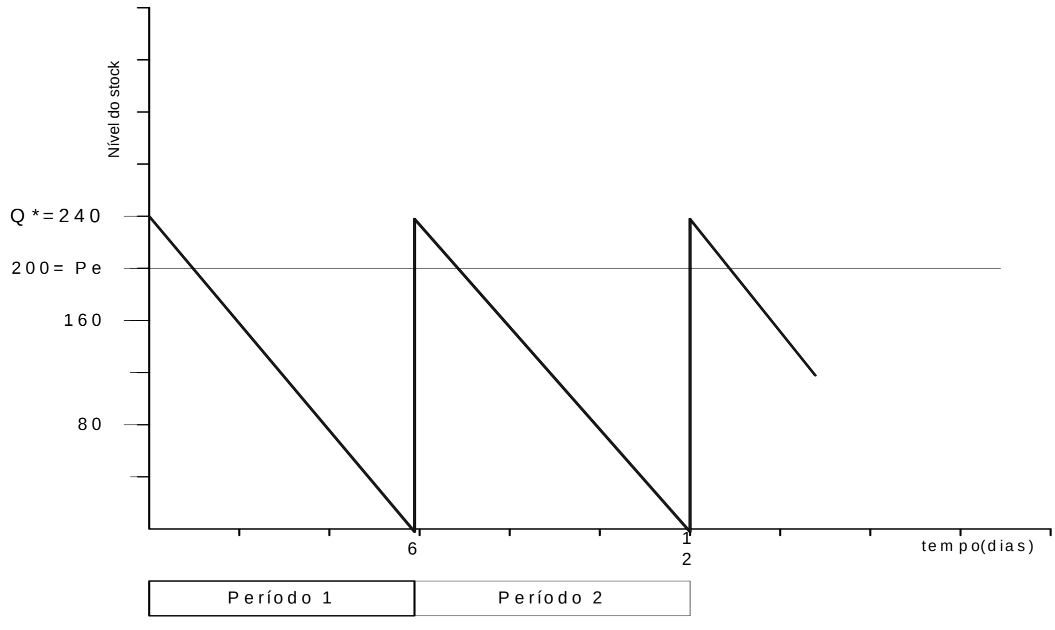
Ponto de Encomenda = $P_e = \theta T_r = (12000)\dfrac{5}{300} = 200\ unidades$

Custo anual = $K^* = \theta C_a + \left(\dfrac{Q^*}{2}\right) C_p + \left(\dfrac{\theta}{Q^*}\right) C_e =$

$$= (12000)(500) + \frac{240}{2}(0.25)(500) + \frac{12000}{240}(300) = 6030000\ u.m.$$

Número de encomendas/ano = $\dfrac{\theta}{Q^*} = \dfrac{12000}{240} = 50$

Política óptima: efectuar 50 encomendas de 240 unidades. A encomenda deve ser efectuada sempre que o nível do stock atinge as 200 unidades. O custo mínimo anual desta gestão é de 6030000 u.m..

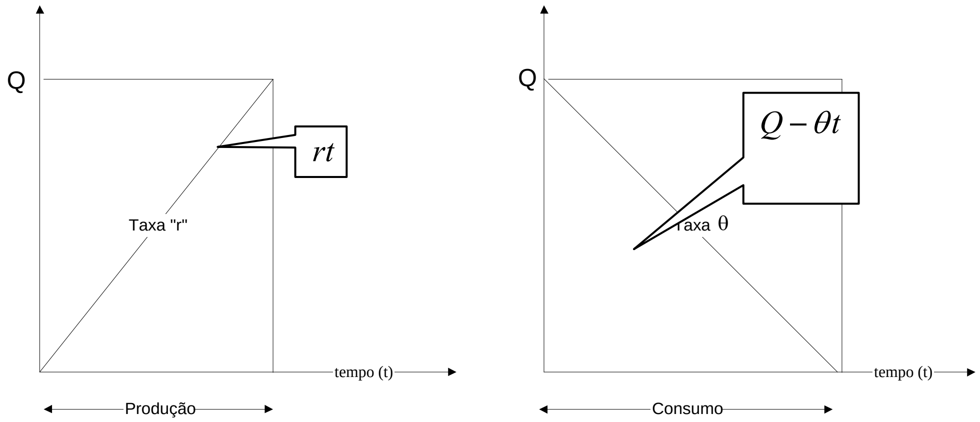


5. Modelo de Produção e Consumo simultâneos (adaptação do modelo de QEE)

a. Pressupostos

- Consumo: constante e contínuo à taxa "θ"
- Produção (reaprovisionamento) constante e contínua à taxa "r" (com $r \geq \theta$)
- Custo de Ruptura : não é admitida a ruptura do stock

b. Formalização



Sendo o artigo *simultaneamente produzido e consumido às taxas "r" e "θ"*, respectivamente, em cada unidade de tempo "sobram" (r-θ) unidades que entram em stock.

Produzindo Q unidades durante T_p unidades de tempo (tempo de produção) , entram em stock $T_p(r-\theta)$ unidades do artigo que será o nível máximo que o stock pode atingir pelo que o stock médio é $\frac{T_p}{2}(r-\theta)$.

Dado que $Q = rT_p$ então o **stock médio** pode ser expresso em função de Q, substituindo $T_p = \frac{Q}{r}$ na expressão anterior ficando $\frac{Q}{2r}(r-\theta)$.

O custo do stock, por unidade de tempo, é então $K = \theta C_a + \left(\frac{Q}{2}.\frac{r-\theta}{r}\right)C_p + \left(\frac{\theta}{Q}\right)C_e$

O valor da quantidade óptima Q* obtém-se calculando $\frac{dK}{dQ} = 0 \quad (porque\ \frac{d_k^2}{d_Q^2} > 0)$:

$$\frac{dK}{dQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{r-\theta}{r}\right)C_p - \frac{\theta C_e}{Q^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2\theta C_e}{C_p}}\cdot\sqrt{\frac{r}{r-\theta}}}$$

A Quantidade Económica de Encomenda (QEE):

- é *directamente proporcional à raiz quadrada da taxa de reaprovisionamento (taxa de produção)*
- é *inversamente proporcional à raiz quadrada do aumento do nível do stock por unidade de tempo*

c. Exemplo de aplicação do modelo de Produção e Consumo simultâneos

Uma empresa pode produzir anualmente 20000 ton. de uma resina sintética cuja procura média, no mesmo período, é de 15000 ton. O custo associado à preparação (5 dias) para produzir um lote é de 98000 u.m. e o custo de produção é de 20000u.m./ton. Admitindo uma taxa de posse de 30% calcular a política óptima de gestão do stock desta resina, considerando o ano com 300 dias.

SOLUÇÃO

Dados: $\theta = 15000 \,/\, ano\,; r = 20000 \,/\, ano\,; C_a = 20000\ u.m./ton.\,; C_e = 98000\ u.m.\,;$

$$I = 0.3 \;\Rightarrow\; C_p = (0.3)(20000) = 6000\ u.m./\,ano\ (por\ ton.)\,;\ T_r = 5\,dias$$

Lote Económico a produzir = $Q^* = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{C_p}}.\sqrt{\dfrac{r}{r-\theta}} = \sqrt{\dfrac{2(15000)(98)}{6}}.\sqrt{\dfrac{20000}{20000-15000}} = 1400\ ton.$

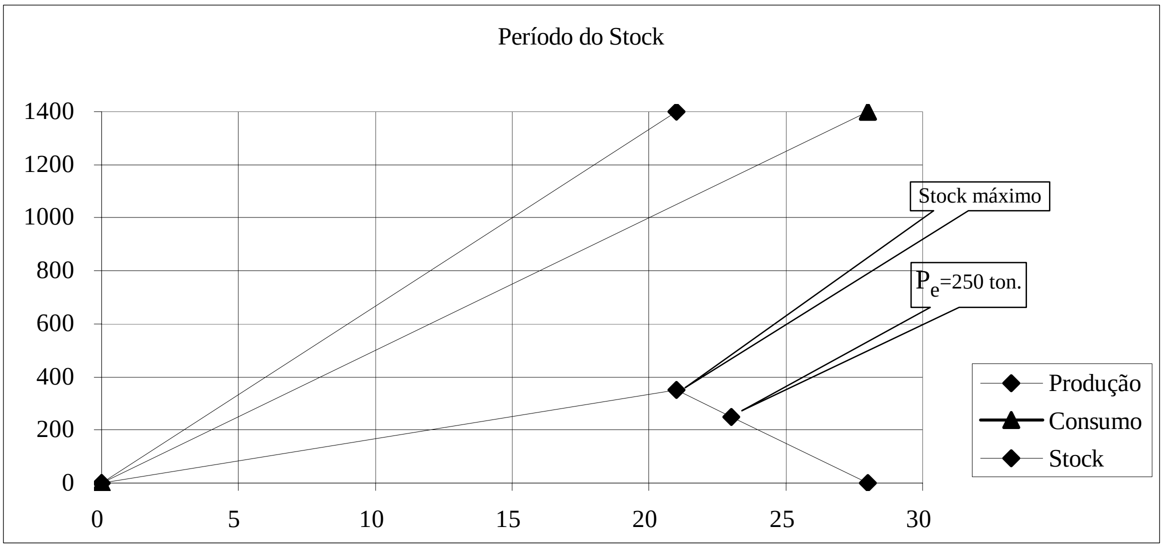
Período (ciclo) = $T^* = \dfrac{Q^*}{\theta} = \dfrac{1400}{15000}(300) = 28\ dias$

Tempo de Produção de um lote = $T_p = \dfrac{Q^*}{r} = \dfrac{1400}{20000}(300) = 21\ dias$

Stock Máximo = $T_p(r-\theta) = 21\left(\dfrac{20000-15000}{300}\right) = 350\ ton.$

Ponto de Encomenda (produzir novo lote) = $P_e = \theta T_r = (15000)\dfrac{5}{300} = 250\ ton.\ em\ stock$

Custo anual = $K = \theta C_a + \left(\dfrac{Q}{2}.\dfrac{r-\theta}{r}\right)C_p + \left(\dfrac{\theta}{Q}\right)C_e = 300000 + 1050 + 1050 = 302100\,(10^3)\ u.m.$



<u>Política óptima</u>: produzir lote de 1400 ton. (durante 21 dias) com intervalo de 28 dias. Quando o stock activo atingir 250 ton. iniciar a produção de novo lote. O custo mínimo anual do stock é de 302.100.000 u.m..

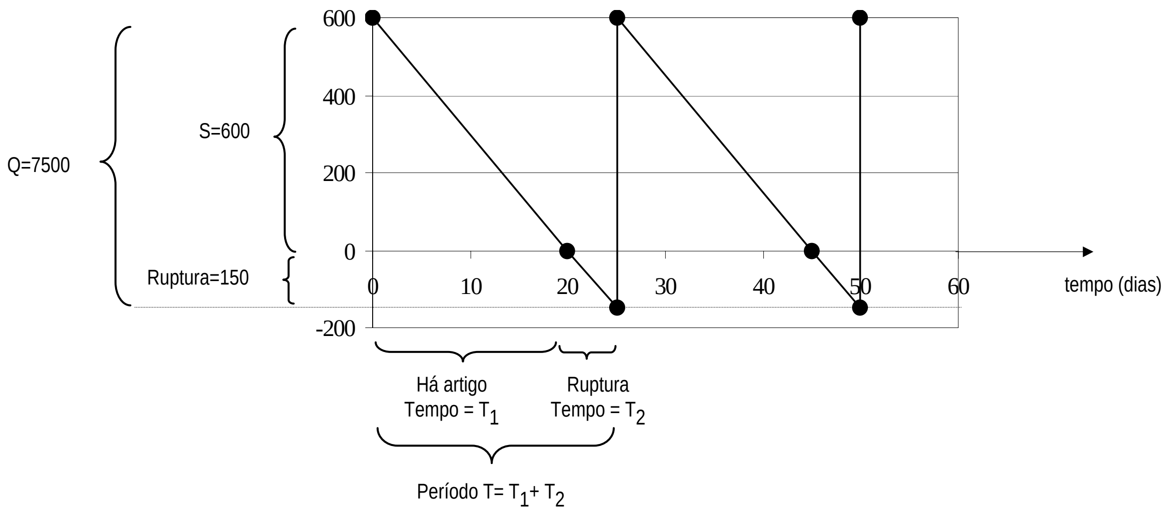
6. Modelo com ruptura do stock (adaptação do modelo de QEE)

a. Pressupostos

- Procura: constante e contínua à taxa "θ"
- Tempo de Reaprovisionamento : $T_r = 0$
- É admitida a ruptura do stock com custo unitário C_r

b. Formalização

O gráfico seguinte traduz a evolução do stock de um artigo em função do tempo:



O gráfico anterior mostra o stock de um artigo com um período de “T” unidades de tempo.

O stock inicial activo é de “S=600 unidades” que são escoadas em T_1 unidades de tempo ($T_1 < T$).

Durante o intervalo de tempo de $T_2 = T\text{-}T_1$ unidades de tempo, <u>não há artigo em stock</u> (ruptura) para satisfazer a procura de 150 unidades.

<u>*Admite-se que a satisfação desta procura pode ser diferida para o momento em que é recebida nova encomenda*</u> de “Q=750 unidades”.

<u>*Quando chega nova encomenda*</u>, entram em stock activo “S=600 unidades” enquanto “Q-S=150 unidades” são de imediato entregues para satisfazer a procura “em dívida do período anterior”.

No intervalo de tempo “T” os custos associados ao stock são os seguintes:

Aquisição: QC_a

Encomenda : C_e (1 encomenda de “Q” unidades)

Posse: O stock médio no tempo “T” é de $\frac{S+0}{2} = \frac{S}{2}$ unidades, por unidade de tempo, pelo que no período “T” o custo da posse é de $C_p\left(\frac{S}{2}\right)T_1$ (notar que só há posse durante T_1 unidades de tempo do total do período “T”).

Ruptura:

A ruptura média no tempo "T" é de $\dfrac{(Q-S)+0}{2}=\dfrac{Q-S}{2}$ unidades, por unidade de tempo, pelo que no período "T" o custo da ruptura é de $C_r\left(\frac{Q-S}{2}\right)T_2$ (notar que só há ruptura durante T_2 unidades de tempo do período "T").

No período "T" o custo total K_T é pois (AQUISIÇÃO + POSSE + RUPTURA + ENCOMENDA):

$$K_T = QC_a + C_p\frac{S}{2}T_1 + C_r\frac{Q-S}{2}T_2 + C_e$$

Do gráfico anterior, deduz-se que $\dfrac{Q}{S}=\dfrac{T}{T_1}$ e que $\dfrac{Q}{Q-S}=\dfrac{T}{T_2}$ pelo que $T_1=\dfrac{ST}{Q}$ e $T_2=\dfrac{(Q-S)T}{Q}$.

Substituindo T_1 e T_2 por estes valores na expressão do custo total no tempo "T" tem-se:

$$K_T = QC_a + C_p\frac{S^2}{2Q}T + C_r\frac{(Q-S)^2}{2Q}T + C_e$$

O custo do stock **por unidade de tempo** é então $K=\dfrac{K_T}{T}=\theta C_a + C_p\dfrac{S^2}{2Q}+C_r\dfrac{(Q-S)^2}{2Q}+\dfrac{\theta}{Q}C_e$ de que se pretende o valor mínimo.

Notando que K= f(Q,S) calculam-se os valores óptimos de "Q" e "S" que anulam a 1ª derivada pois a eles está associado o valor mínimo de K (porque as segundas derivadas da função são positivas):

Tem-se então $\begin{cases}\dfrac{\partial K}{\partial S}=0\\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial Q}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{2SC_p}{2Q}+\dfrac{-2C_r(Q-S)}{2Q}=0\\[2ex] \dfrac{-2C_pS^2}{4Q^2}+\dfrac{4QC_r(Q-S)-2C_r(Q-S)^2}{4Q^2}-\dfrac{\theta C_e}{Q^2}=0\end{cases}$

Procedendo à simplificação do sistema de equações obtém-se:

$$\begin{cases}S=Q\left(\dfrac{C_r}{C_p+C_r}\right)\\[2ex] Q^2C_r - S^2(C_p+C_r)=2\theta C_e\end{cases}$$

Da 1ª equação deduz-se que o stock activo "S" é uma parte de "Q" pelo que $\rho=\dfrac{C_r}{C_p+C_r}$ representa o *Nível de Serviço. Assim, por exemplo, se* $\rho = 0.95$ *tal significa que, no período "T", 95% da procura é satisfeita e que 5% não é satisfeita (sê-lo-á quando recebida a encomenda para o período seguinte).*

Verifica-se, na expressão de "ρ" que:

- Se o Custo de Ruptura é muito superior ao Custo de Posse, o nível de serviço "ρ" tende para 1 e portanto o stock máximo tende para "Q" (caso dos artigos com baixo custo de aquisição);
- Se o Custo de Posse é muito superior ao Custo de Ruptura, a taxa de serviço "ρ" tende para 0 e portanto o stock activo tende também para zero (caso dos artigos com elevado custo de aquisição);

Substituindo no sistema de equações tem-se:

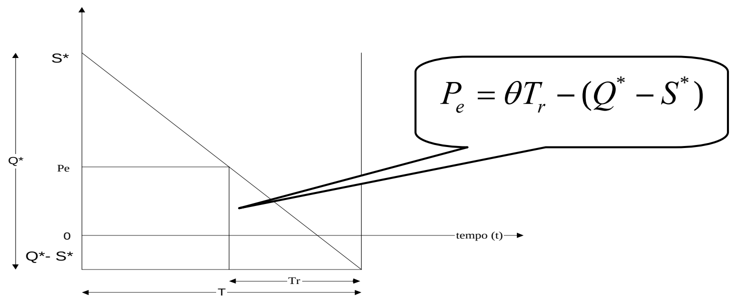
$$\boxed{\begin{cases} S^* = Q^* \rho \\ \\ Q^* = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{C_p}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\rho}} \end{cases}}$$

Para os restantes parâmetros tem-se:

Período do stock (ciclo) = $T^* = \dfrac{Q^*}{\theta}$

Tempo com stock activo $= T_1^* = \dfrac{S^*}{\theta}$

Tempo com stock em ruptura $= T_2^* = \dfrac{Q^* - S^*}{\theta}$



Ponto de Encomenda P_e *:*

Nota: $P_e \le Q^*;\ se\ T_r < T_2^* \Rightarrow P_e < 0$

c. Exemplo de aplicação do modelo de QEE com Ruptura do stock

Considere-se o artigo X de que a procura média mensal (25 dias) é de 150 unidades com variabilidade insignificante.

O capital necessário para suportar o stock durante 1 mês, com ruptura, pode alternativamente ser aplicado com rendimento de 10%.

Sendo 10 u.m. o custo unitário de aquisição, 50 u.m. o custo de encomenda, 2 u.m. o custo unitário de ruptura e de 5 dias o prazo de entrega, calcular a política óptima de gestão deste stock.

SOLUÇÃO

Dados: $\theta = 150\,/\,mês\,; C_a = 10\ u.m.; C_e = 50\,u.m.; C_r = 2\,u.m.; I = 0.1; T_r = 5\ dias$

Nível do serviço = $\rho = \dfrac{C_r}{C_r + C_p} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 66\%\ do\ período\ com\ stock\ activo$

Quantidade Económica de Encomenda = $Q^* = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{I\ C_a}}.\sqrt{\dfrac{1}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{2(150)(50)}{(0.1)(10)}}.\sqrt{\dfrac{3}{2}} = 150\ unidades$

Stock máximo (activo) = $S^* = Q^* \rho = 150\dfrac{2}{3} = 100\ unidades$

Período (ciclo) = $T^* = \dfrac{Q^*}{\theta} = \dfrac{150}{150} = 1\ mês = 25\ dias$

Tempo com stock activo $= T_1^* = \dfrac{S^*}{\theta} = \dfrac{100}{150} = 0.67\ meses = 16.67\ dias$

Tempo com stock em ruptura $= T_2^* = \dfrac{Q^* - S^*}{\theta} = \dfrac{150-100}{150} = 0.33\ meses = 8.33\ dias$

Ponto de Encomenda = $P_e = \theta T_r - (Q^* - S^*) = (150)\dfrac{5}{25} - (150-100) = 30 - 50 = -20\ unidades$

Custo mensal $= K = \theta C_a + C_p \dfrac{S^{*2}}{2Q^*} + C_r \dfrac{(Q^* - S^*)^2}{2Q^*} + \dfrac{\theta}{Q^*} C_e = 1500 + 33.33 + 16.66 + 50 = 1600\,u.m.$

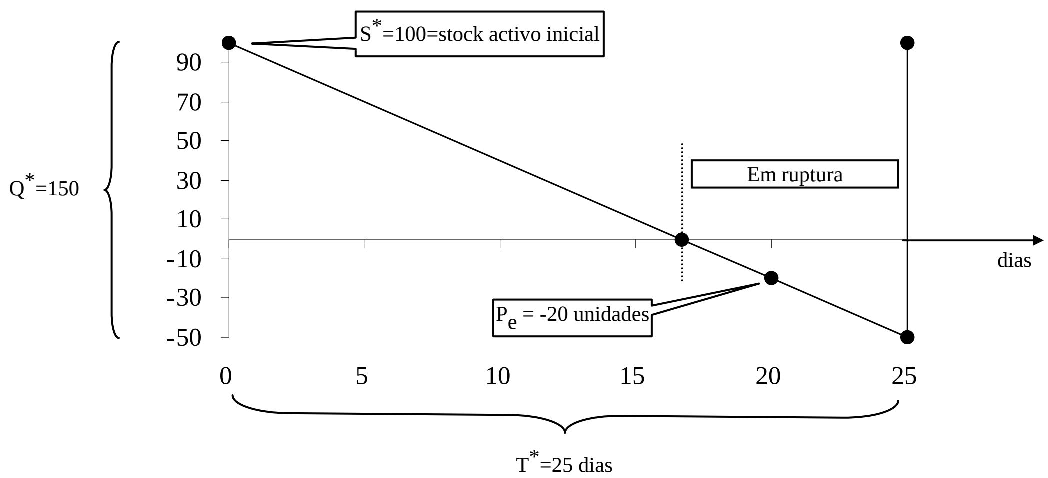
Número de encomendas/mês = $\dfrac{\theta}{Q^*} = \dfrac{150}{150} = 1$

Política óptima: efectuar 1 encomenda de 150 unidades a intervalos de 1 mês. A encomenda deve ser efectuada sempre que o nível do stock atinge as -20 unidades (acumuladas 20 unidades em dívida).

Recebida a encomenda, 50 unidades são para satisfazer clientes do período anterior e 100 unidades entram em stock activo.

O nível de serviço é de 66% ($^2/_3$ do período com artigo em stock)

O custo mínimo desta gestão é de 1600 u.m./mês.



7. Modelo com Desconto de Quantidade e sem ruptura (adaptação do modelo de QEE)

a. Pressupostos

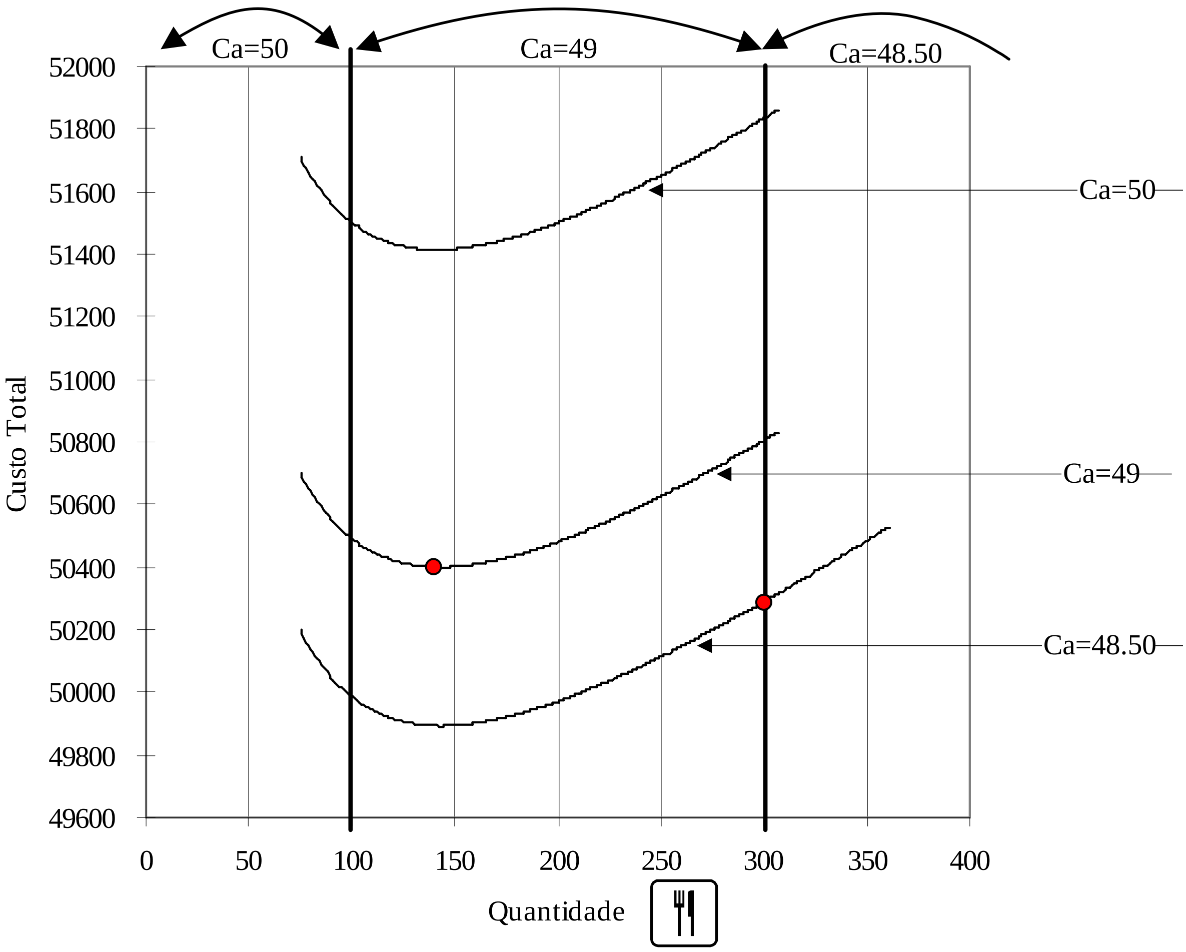
- Procura: constante e contínua
- Tempo de Reaprovisionamento : $T_r = 0$
- O Custo de Aquisição varia com a quantidade adquirida (desconto de quantidade)

b. Formalização

No gráfico seguinte veja-se o andamento das curvas de Custo Total do Stock para um artigo com Custo de Aquisição igual a 50 u.m.:

- C_a=50 u.m. para aquisições de 0 a 99 unidades (desconto de 0%)
- C_a=49 u.m. para aquisições de 100 a 299 unidades (desconto de 2%)
- C_a=48.50 u.m. para aquisições de 300 ou mais unidades (desconto de 3%)

Notar que para cada um destes custos, a quantidade a encomendar só é admissível se pertencer ao intervalo onde vigoram aqueles custos.



<u>Curva de C_a = 48.50</u> : *A quantidade admissível <u>com menor custo total do stock</u> é de 300 unidades que é uma quantidade limite ("break") ; (notar que Q^* não é admissível pois está fora do intervalo).*

Curva de C_a = 49 : *A quantidade admissível com menor custo total do stock é de 143 unidades (é o valor de Q^* pois pertence ao intervalo).*

Curva de C_a = 50 : *Não carece de análise dado ter ordenadas superiores às da curva anterior onde o custo mínimo está associado a uma quantidade admissível no intervalo de desconto.*

Das quantidades admissíveis, com menor custo, pode concluir-se que devem encomendar-se Q^* = 300 unidades aproveitando o desconto de 3%.

Da análise do gráfico conclui-se que, com desconto de quantidade, o valor óptimo da variável de decisão Q, *é a abcissa do mínimo de uma das curvas de custo total* ou *é uma quantidade limite de intervalo (quantidade de" break").*

Resulta desta constatação a técnica a seguir exposta para calcular a quantidade económica de encomenda.

Para tal considerem-se os intervalos de desconto 1,2, …, n por ordem decrescente de custo de aquisição e inicie-se o estudo no intervalo "n" designando Q_n a quantidade inicial (menor valor) do intervalo.

1º Passo: Calcular $Q = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{I\ C_a}}$ *no intervalo de menor custo de aquisição (intervalo "n")*

Situações possíveis:

- o valor calculado *é admissível* $\Rightarrow$ encomendar Q^* = Q calculado (fim do cálculo)
- o valor calculado *não é admissível* $\Rightarrow$ calcular o custo total do stock "K(Q_n) " para uma encomenda de Q_n = quantidade do limite inferior do intervalo em estudo e considerar este custo como Min K corrente; executar o passo seguinte

2º Passo: Calcular $Q = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{I\ C_a}}$ *no intervalo adjacente ("n-1")*

Situações possíveis:

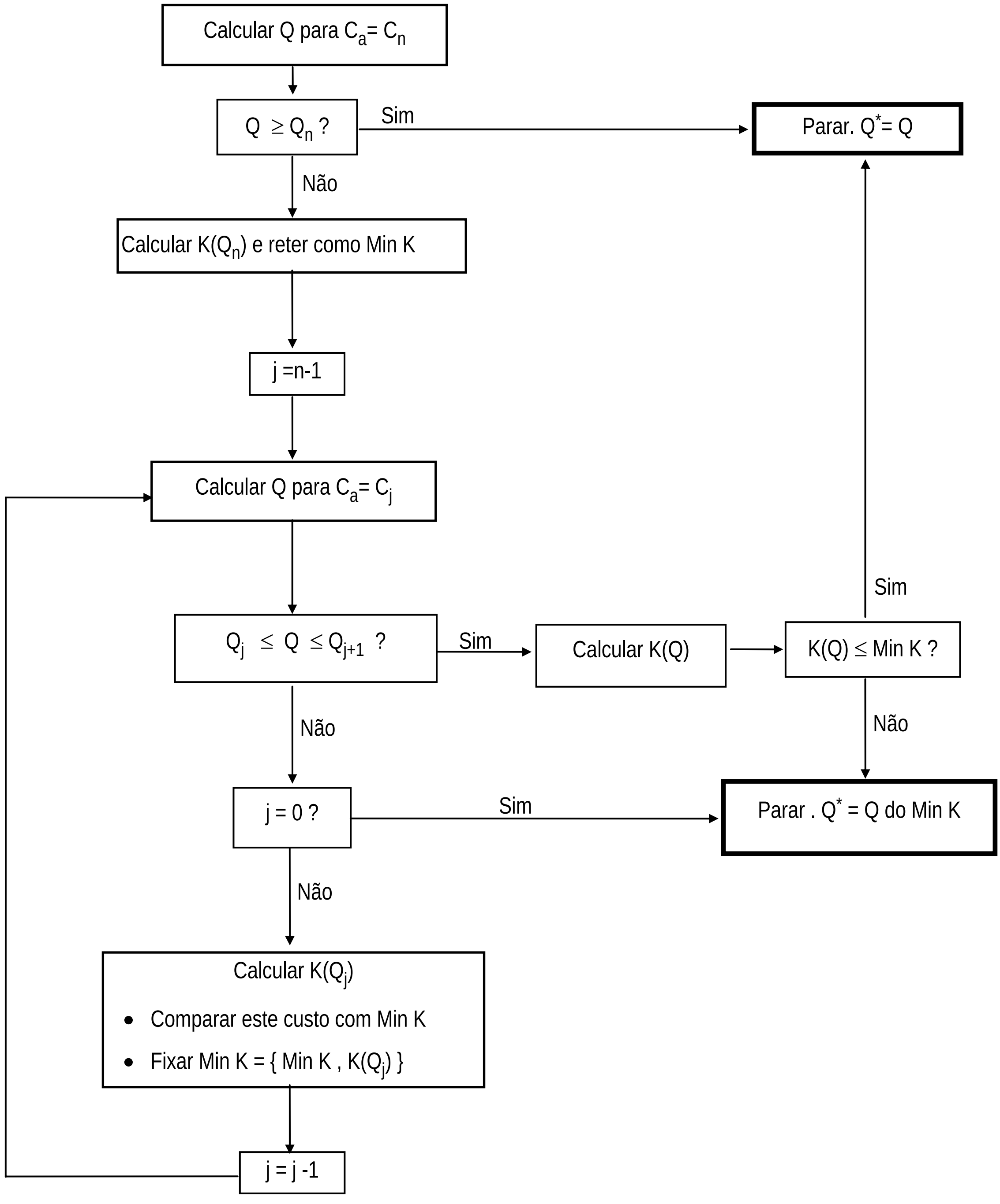
- o valor calculado *é admissível* $\Rightarrow$ calcular o custo total do stock "K" para esta quantidade Q e comparar com o Min K corrente

  Situações possíveis:

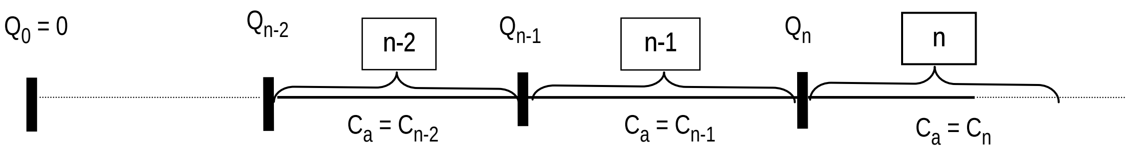
  - "K" agora calculado é inferior ao Min K corrente $\Rightarrow$ encomendar Q^* = Q agora calculado (fim do cálculo)
  - "K" agora calculado é superior ao Min K corrente $\Rightarrow$ calcular o custo total do stock "K(Q_{n-1}) " para uma encomenda de Q_{n-1} = quantidade do limite inferior do intervalo em estudo ; comparar "K(Q_{n-1}) " com o valor do Min K corrente e actualizar este se o valor de "K(Q_{n-1}) " for inferior

Repetir o 2º Passo, tantas vezes quantas as necessárias, até obter uma quantidade admissível $Q = \sqrt{\dfrac{2\theta C_e}{I\ C_a}}$ com custo total do stock inferior ao Min K corrente ou, se tal não sucede, a encomenda será de Q^* igual à quantidade associada ao Min K. Na página seguinte apresenta-se o fluxograma da técnica de optimização da quantidade de encomenda com descontos de quantidade.

FLUXOGRAMA
DESCONTOS DE QUANTIDADE



Intervalos de desconto (n, n-1, n-2 …); Quantidades de "break" (Q_n, Q_{n-1} , Q_{n-2} , …)



c. Exemplo de aplicação do modelo de QEE com Descontos de Quantidade

Uma empresa adquire no exterior um dado componente de que consome, em média, 10000 unidades ao longo de um ano.

Um fornecedor propõe-se vender o componente a 90 u.m., oferecendo os descontos a seguir indicados:

	Desconto unitário
$0 \leq Q < 1000$	0%
$1000 \leq Q < 3000$	2%
$3000 \leq Q < 6000$	4%
$6000 \leq Q < 9000$	6%
$9000 \leq Q$	10%

O processamento de uma encomenda tem um custo de 100 u.m..e a taxa de posse é de 25% ao ano.

Calcular a política óptima para o stock do componente.

SOLUÇÃO

Dados: $\theta = 10000\,/\,ano\,; C_e = 100\,u.m.\,; I = 0.25$

Intervalo	C_a	QEE	Limite Inferior	K_{ano} para Q = Limite inferior	Decisão
> 9000	81.00	$Q = \sqrt{\dfrac{(2)(10000)(100)}{(0.25)(81)}} =$ $Q = 315\ (\textit{não admissivel})$ Calcular K_{ano} para Q do limite inferior deste intervalo	9000	Aquisição = $(10000)(81) = 810000$ Posse = $\dfrac{9000}{2}(0.25)(81) = 91125$ Encomenda = $\dfrac{10000}{9000}(100) = 111.11$ ***Total*** *(ano)=901236.11 u.m.= Min* K_{9000}	Passar ao intervalo seguinte
6000 a 8999	84.60	$Q = \sqrt{\dfrac{(2)(10000)(100)}{(0.25)(84.6)}} =$ $Q = 308\ (\textit{não admissivel})$ Calcular K_{ano} para Q do limite inferior deste intervalo	6000	Aquisição = $(10000)(84.6) = 846000$ Posse = $\dfrac{6000}{2}(0.25)(84.6) = 63450$ Encomenda = $\dfrac{10000}{6000}(100) = 166.67$ Total (ano)=909616.67 > Min K_{9000} (mantém-se Min K_{9000} = 901236.11 u.m.)	Passar ao intervalo seguinte
3000 a 5999	86.40	$Q = \sqrt{\dfrac{(2)(10000)(100)}{(0.25)(86.4)}} =$ $Q = 305\ (\textit{não admissivel})$ Calcular K_{ano} para Q do limite inferior deste intervalo	3000	Aquisição = $(10000)(86.4) = 864000$ Posse = $\dfrac{3000}{2}(0.25)(86.4) = 32400$ Encomenda = $\dfrac{10000}{3000}(100) = 333.33$ Total (ano)=896733.33 < Min K_{9000} *Novo Min* K_{3000} *= 896733.33 u.m.*	Passar ao intervalo seguinte
1000 a 2999	88.20	$Q = \sqrt{\dfrac{(2)(10000)(100)}{(0.25)(88.2)}} =$ $Q = 302\ (\textit{não admissivel})$	1000	Aquisição = $(10000)(88.2) = 882000$ Posse = $\dfrac{1000}{2}(0.25)(88.2) = 11025$	Passar ao intervalo seguinte

		Calcular K_{ano} para Q do limite inferior deste intervalo		Encomenda = $\frac{10000}{1000}(100) = 1000$ Total (ano)=894025 < Min K_{3000} *Novo Min K_{1000} = 894025 u.m.*	

Intervalo	C_a	QEE	Limite Inferior	K_{ano} para Q = Limite inferior	Decisão
0 a 999	90	$Q = \sqrt{\frac{(2)(10000)(100)}{(0.25)(90)}} =$ $Q = 299\ (admissivel)$ Calcular K_{ano} para 299: Aquisição= $(10000)(90) = 900000$ Posse = $\frac{299}{2}(0.25)(90) = 3363.75$ Encomenda = $\frac{10000}{299}(100) = 3344.48$ Total (ano)=906708.23 u.m. Total (ano) > Min K_{1000} Terminar cálculo Óptimo é Q^*=1000 associado ao Min K_{1000} .			Q^*= 1000

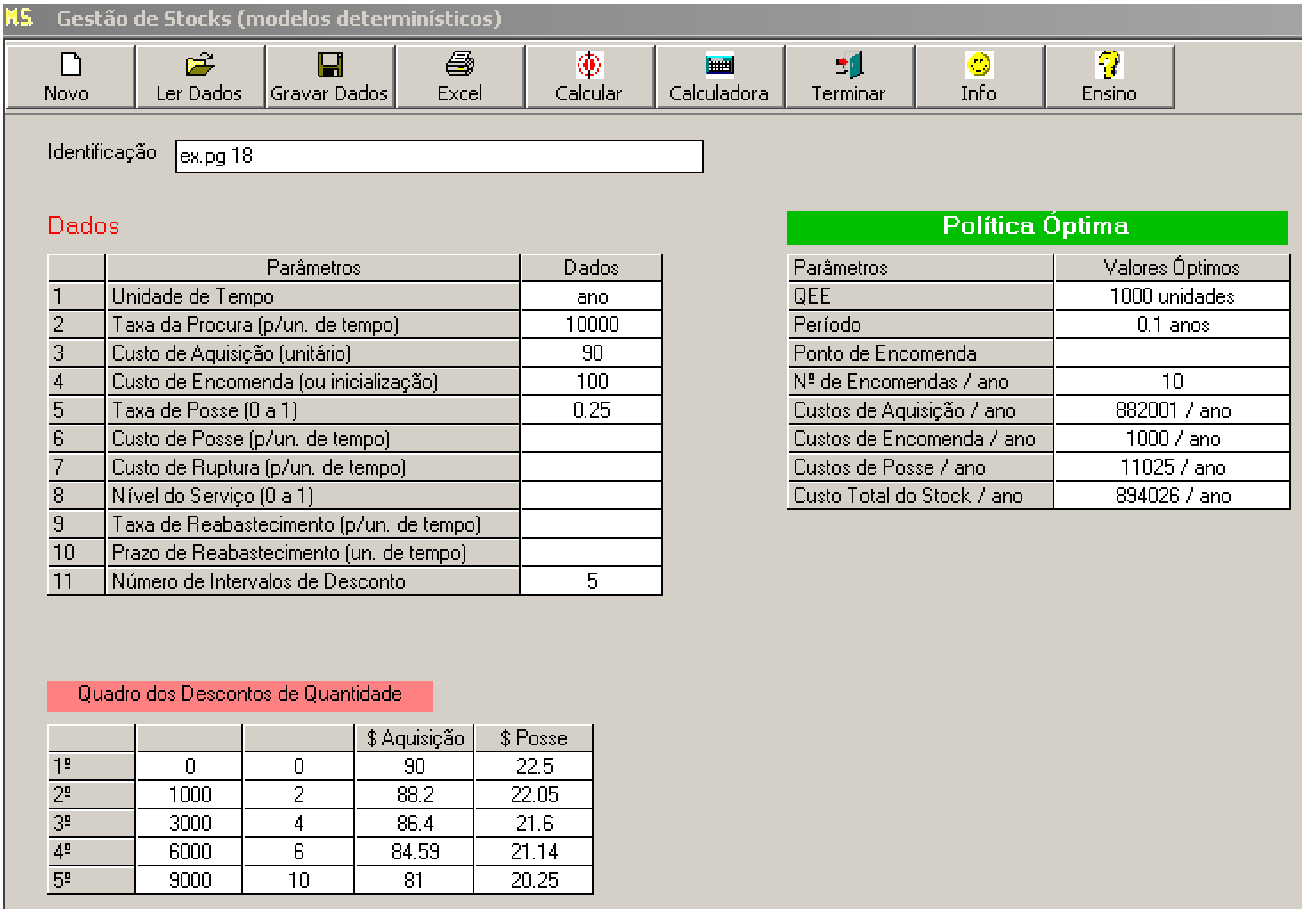
Período (ciclo) = $T^* = \frac{Q^*}{\theta} = \frac{1000}{10000} = 0.1\ anos = 1.2\ meses$

Custo anual = Min K_{1000} = 894025.00 u.m. / ano

Número de encomendas/ano = $\frac{\theta}{Q^*} = \frac{10000}{1000} = 10$

Política óptima: efectuar encomendas de 1000 unidades com intervalo de 1.2 meses. O custo mínimo anual desta gestão é de 894025 u.m.

Recorrendo ao software do autor tem-se:



Gestão de Stocks (modelos determinísticos)

Novo | Ler Dados | Gravar Dados | Excel | Calcular | Calculadora | Terminar | Info | Ensino

Identificação: ex.pg 18

Dados

	Parâmetros	Dados
1	Unidade de Tempo	ano
2	Taxa da Procura (p/un. de tempo)	10000
3	Custo de Aquisição (unitário)	90
4	Custo de Encomenda (ou inicialização)	100
5	Taxa de Posse (0 a 1)	0.25
6	Custo de Posse (p/un. de tempo)	
7	Custo de Ruptura (p/un. de tempo)	
8	Nível do Serviço (0 a 1)	
9	Taxa de Reabastecimento (p/un. de tempo)	
10	Prazo de Reabastecimento (un. de tempo)	
11	Número de Intervalos de Desconto	5

Política Óptima

Parâmetros	Valores Óptimos
QEE	1000 unidades
Período	0.1 anos
Ponto de Encomenda	
Nº de Encomendas / ano	10
Custos de Aquisição / ano	882001 / ano
Custos de Encomenda / ano	1000 / ano
Custos de Posse / ano	11025 / ano
Custo Total do Stock / ano	894026 / ano

Quadro dos Descontos de Quantidade

			$ Aquisição	$ Posse
1º	0	0	90	22.5
2º	1000	2	88.2	22.05
3º	3000	4	86.4	21.6
4º	6000	6	84.59	21.14
5º	9000	10	81	20.25